

Seminar Hyperbolische Geometrie und Fuchs'sche Gruppen

WINTERSEMESTER 2024/25

Eine *Fuchs'sche Gruppe* ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ oder, mit anderen Worten, eine Gruppe die eigentlich diskontinuierlich auf der hyperbolischen Ebene wirkt. Beispiele sind Symmetriegruppen von Parkettierungen der hyperbolischen Ebene oder die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

In diesem Seminar werden wir die Struktur dieser Gruppen untersuchen, interessante Beispiele mit Verbindung in die Topologie oder Zahlentheorie diskutieren, und beginnen *hyperbolische Flächen* zu studieren. Wesentliche Ziele sind

- Charakterisierungen von Diskretheit
- Limitmengen im Unendlichen
- Eine Verbindung von Kettenbruchzerlegungen mit der Farey-Parkettierung der hyperbolischen Ebene.
- Der Poincaré-Polygon-Satz, der ermöglicht Fuchs'sche Gruppen aus Verklebungen zu konstruieren.
- Geometrische Mannigfaltigkeiten und Abwickelabbildungen.

Dieses Seminar richtet sich primär an Studierende, die im Sommersemester 2024 an meiner Vorlesung "Geometrie" teilgenommen haben, und mehr über hyperbolische Geometrie lernen möchten. Aller notwendiger Hintergrund wurde in dieser Vorlesung besprochen. Falls Sie teilnehmen möchten, ohne die Vorlesung gehört zu haben, können Sie sich gerne bei mir per email melden, um Voraussetzungen zu klären.

Literatur

- (1) Svetlana Katok, "Fuchsian Groups", Chicago Lectures in Mathematics Series
- (2) Alan F. Beardon, "The Geometry of Discrete Groups", Graduate Texts in Mathematics
- (3) Francis Bonahon, "Low-dimensional geometry", Student Mathematical Library
- (4) Allen Hatcher, "The topology of numbers"
- (5) William Thurston, "Three-dimensional Geometry and Topology, Volume 1", Princeton University Press

Zielgruppe: Bachelorstudierende der Mathematik, Studierende im Lehramt Mathematik Gymnasium.

Fragen und Anmeldung Wenn Sie an dem Seminar teilnehmen wollen, oder Fragen haben, melden Sie sich bitte via email an hensel@math.lmu.de.

Vorträge

- (1) **Möbiustransformationen und PSL_2** : Dieser Vortrag wiederholt kurz die hyperbolische Geometrie, und charakterisiert dann alle Isometrien der hyperbolischen Ebene [Bonahon, 2.4]. Dann wird die Klassifikation hyperbolischer Isometrien in drei Typen, über Spuren und über Fixpunkte (im Unendlichen) diskutiert. Die nötigen Aussagen sind im ersten Abschnitt von [Katok 2.1].
- (2) **PSL_2 und Diskretheit I und II** Dies sind *zwei* Vorträge, die zusammen das Material aus [Katok 2.2] besprechen. Primäres Ziel ist die Charakterisierung einer eigentlich diskontinuierlichen Wirkung via Diskretheit der Gruppe [Katok, Satz 2.2.6]. Die Beispiele (Example A und Satz 2.2.3) werden im nächsten Vortrag besprochen.
- (3) **Fuchssche Gruppen: Erste Beispiele und Eigenschaften** Zunächst werden die ersten Beispiele Fuchsscher Gruppen aus [Katok, 2.2] diskutiert. Dann werden die algebraischen Eigenschaften in [Katok, Abschnitt 2.3] die Abelsche Untergruppen von Fuchsschen Gruppen einschränken diskutiert, insbesondere Korollar 2.3.7.
- (4) **Elementare Fuchssche Gruppen** Hier klassifizieren wir die (besonders einfachen) elementaren Fuchsschen Gruppen vollständig [Katok, 2.4 bis einschließlich Satz 2.4.5].
- (5) **Die Farey-Parkettierung, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, und Kettenbrüche I und II** In diesen *zwei (oder drei – je nach Interesse)* Vorträgen konstruieren wir eine invariante Parkettierung für die Fuchssche Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ und stellen eine Verbindung zu Kettenbruchzerlegungen von irrationalen Zahlen her. Wesentliche Ziele sind [Hatcher, Satz 2.1, 2.2, 3.1]. Siehe auch [Bonahon, Kapitel 8] Wie der Stoff genau auf Vorträge aufgeteilt wird, hängt vom Interesse ab.
- (6) **Parkettierungen aus Verklebungen I und II** In diesen *zwei (oder drei – je nach Interesse)* Vorträgen diskutieren wir einen Satz, der aus einer Verklebevorschrift eines n -Ecks eine Parkettierung (und damit eine Fuchssche Gruppe) konstruiert. Quelle ist [Bonahon, Satz 6.1], was aber auf vorigen Resultaten in dem Buch aufbaut, insbesondere [Bonahon Satz 4.4 und Abschnitt 4.5].
- (7) **Fundamentalebereiche und Dirichlet-Parkettierungen** Hier diskutieren wir, wie man im Allgemeinen aus einer Fuchsschen Gruppe zu einer Parkettierung der hyperbolischen Ebene kommt. [Katok, 3.1 und 3.2]

- (8) **Dirichlet-Parkettierungen und Algebra** Hier diskutieren wir den Zusammenhang zwischen der Dirichlet-Parkettierung und algebraischen Eigenschaften der Fuchsschen Gruppe. Ziel ist [Katok, Satz 3.5.4], der Erzeuger der Fuchsschen Gruppe aus der Geometrie eines Fundamentalbereichs rekonstruiert, und gewissermaßen die Umkehrung der Konstruktion aus Verklebung aus den vorigen Vorträgen ist.
- (9) **(Geometrische Mannigfaltigkeiten und Abwickelabbildungen)** Je nach Interesse und Teilnehmerzahl könnte man am Ende noch *hyperbolische Flächen*, d.h. zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit Karten in der hyperbolischen Ebene diskutieren, und diese via sogenannter *Abwickelabbildungen* mit den Fuchsschen Gruppen in Verbindung setzen. Quelle hier wäre [Thurston]; dieses Material ist etwas fortgeschrittener und anspruchsvoller.